Théorème central limite et applications

Théorème Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant un moment d'ordre 2 fini.
On note $m := \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}\, X_1 > 0$ et $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors : $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

On pose :
$\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$ et φ la fonction caractéristique de $X_1 - m$

On obtient :

$$\varphi_{Y_n} = \mathbb{E}\left[\exp\left(it\, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum (X_k - m)\right)\right]$$

$$\text{''} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(it\, \frac{X_n - m}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \quad \text{par indépendance}$$

$$\text{''} = \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n$$

Or $X_n - m$ admet un moment d'ordre 2 donc φ est de classe C^2 et :
$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$ au voisinage de 0

Avec : — théorème de dérivation sous le signe intégrale

$\varphi(0) = 1 \qquad \varphi'(0) = i\,\mathbb{E}[X_n - m] = 0 \qquad \varphi''(0) = i^2\, \mathbb{E}[(X_n - m)^2] = -\sigma^2$

Donc : — il s'agit d'un petit o et $\sim$ dans $\mathbb{C}$.

$\varphi(t) = 1 - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ d'où : $\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2n}$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-t^2/2}$.
On reconnaît la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Donc par le théorème de Levy,

$$Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{1}{k!} - a_{n,k}\right| |z|^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - a_{n,k}\right) |z|^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$
$$= e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \longrightarrow 0$$

car $|z| \in \mathbb{R}$

Application Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue périodique de période $T > 0$.
Alors $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$.

On note $S_n(f) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right)$ et $I(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} f(x)\, dx$.

On considère pour tout n,
$X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ alors $\mathbb{E}[X_n] = \frac{n}{2}$, $\mathrm{Var}\, X_n = \frac{n}{4}$ et $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}$

Ainsi : $S_n(f) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_n - n/2}{\sqrt{n/4}}\right)\right]$

Or X_n est la somme de n variables iid de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ et f est continue bornée, par conséquent par le théorème central limite,

$$S_n(f) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_n - n/2}{\sqrt{n/4}}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(N)] \quad \text{où } N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Donc :

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I(f)$$